BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2013***

УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ IV ПОРЯДКА

З.Б.СЕИДОВ
Бакинский Государственный Университет
seyidovzahid@mail.ru

В работе исследуется краевая задача с интегральными условиями для дифференциальных уравнений IV порядка. Для численного решения этой задачи строится явная разностная схема [1], и эта схема решается методом разложения [2].

Ключевые слова: единственное решение, разностная схема, метод разложение, ввод вспомагательных функций.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}
&y^{IV} = a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y + f(x), \ (0 \le x \le T), \\
&\alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0) = \gamma_1, \\
&\beta_0 y(T) + \beta_1 y'(T) = \gamma_2, \\
&\int_0^T \delta(s)(y(s) + y'(s))ds = \gamma_3, \\
&\int_0^T \Delta(s)(y''(s) + y'''(s))ds = \gamma_4.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\beta_0 \ne 0$.

Предположим, что данная краевая задача имеет единственное решение. Введем функции

$$y' = v, \ v' = u, \ u' = w,$$

$$z(x) = \int_0^x \delta(s)(y(s) + v(s))ds,$$

$$\theta(x) = \int_0^x \Delta(s)(u(s) + w(s))ds.$$

Отсюда имеем $z(0)=\theta(0)=0,\ z(T)=\gamma_3,\ \theta(T)=\gamma_4$.

Разобьем отрезок $[0,T]$ с шагом $h=\dfrac{T}{N}$ на N равных частей с узловыми точками $x_0=0,\ x_1=h,\ ...,\ x_N=T$ и составим разностную схему для краевой задачи (1):

$$
\begin{aligned}
& y_{i+1}=y_i+hv_i,\ v_{i+1}=v_i+hu_i,\ u_{i+1}=u_i+hw_i,\\
& w_{i+1}=(1+ha_i)w_i+hb_iu_i+hc_iv_i+hd_iy_i+hf_i,\\
& z_{i+1}=z_i+h\delta_i(y_i+v_i),\ i=0,1,...,N-1,\\
& \theta_{i+1}=\theta_i+h\Delta_i(u_i+w_i),\\
& \alpha_0y_0+\alpha_1v_0=\gamma_1,\\
& \beta_0y_N+\beta_1v_N=\gamma_2,\\
& z_0=\theta_0=0,\ z_N=\gamma_3,\ \theta_N=\gamma_4.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В этой разностной задаче первоначальными неизвестными являются y_0, v_0, u_0, w_0. Для определения этих неизвестных, сначала рассмотрим разложение $[2]$ вида

$$z_i=R_iy_i+P_iv_i+Q_iu_i+E_iw_i+S_i. \tag{3}$$

Заменяя здесь i на $i+1$ и учитывая равенства (2) имеем

$$
\begin{aligned}
& R_iy_i+P_iv_i+Q_iu_i+E_iw_i+S_i+h\delta_i(y_i+v_i)=R_{i+1}y_i+hR_{i+1}v_i+\\
& +P_{i+1}v_i+hP_{i+1}u_i+Q_{i+1}u_i+hQ_{i+1}w_i+E_{i+1}(1+ha_i)w_i+hE_{i+1}b_iu_i+\\
& +hE_{i+1}c_iv_i+hE_{i+1}d_iy_i+hE_{i+1}f_i+S_{i+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (R_i+h\delta_i-R_{i+1}-hE_{i+1}d_i)y_i+(P_i+h\delta_i-hR_{i+1}-P_{i+1}-hE_{i+1}c_i)v_i+\\
& +(Q_i-hP_{i+1}-Q_{i+1}-hE_{i+1}b_i)u_i+(E_i-hQ_{i+1}-E_{i+1}(1+ha_i))w_i+\\
& +S_i=S_{i+1}+hE_{i+1}f_i.
\end{aligned}
$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при y_0, v_0, u_0, w_0 обращались в нуль. Тогда будем иметь

$$
\begin{aligned}
&R_i = R_{i+1} - h\delta_i + hE_{i+1}d_i,\\
&P_i = P_{i+1} + hR_{i+1} + hE_{i+1}c_i - h\delta_i,\\
&Q_i = hP_{i+1} + Q_{i+1} + hE_{i+1}b_i,\\
&E_i = hQ_{i+1} + E_{i+1}(1 + ha_i),\\
&S_i = S_{i+1} + hE_{i+1}f_i.
\end{aligned} \tag{4}
$$

В равенстве (3) положим $i = N$ и учтём равенство $z_N = \gamma_3$. Тогда будем иметь

$$R_N = P_N = Q_N = E_N = 0,\ \ S_N = \gamma_3.$$

Поэтому из равенств (4) можно определить R_{N-1}, P_{N-1}, Q_{N-1}, E_{N-1}, $S_{N-1},..., R_0$, P_0, Q_0, E_0, S_0. В равенстве (3) положим $i = 0$ и учтём равенство $z_0 = 0$. Тогда будем иметь

$$R_0 y_0 + P_0 v_0 + Q_0 u_0 + E_0 w_0 + S_0 = 0. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим разложение вида

$$\theta_i = R_i' y_i + P_i' v_i + Q_i' u_i + E_i' w_i + S_i'. \tag{6}$$

Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
&R_i' y_i + P_i' v_i + Q_i' u_i + E_i' w_i + S_i' + h\Delta_i (u_i + w_i) = R_{i+1}' y_i + hR_{i+1}' v_i + P_{i+1}' v_i +\\
&+ hP_{i+1}' u_i + Q_{i+1}' u_i + hQ_{i+1}' w_i + E_{i+1}'(1 + ha_i) w_i + hE_{i+1}' b_i u_i + hE_{i+1}' c_i v_i +\\
&+ hE_{i+1}' d_i y_i + hE_{i+1}' f_i + S_{i+1}',
\end{aligned}
$$

отсюда имеем

$$
\begin{aligned}
&R_i' = R_{i+1}' + hE_{i+1}' d_i,\\
&P_i' = P_{i+1}' + hR_{i+1}' + hE_{i+1}' c_i,\\
&Q_i' = hP_{i+1}' + Q_{i+1}' + hE_{i+1}' b_i - h\Delta_i,\\
&E_i' = hQ_{i+1}' + E_{i+1}'(1 + ha_i) - h\Delta_i,\\
&S_i' = S_{i+1}' + hE_{i+1}' f_i.
\end{aligned}
$$

Так как $R_N' = P_N' = Q_N' = E_N' = 0,\ S_N' = \gamma_4$, то определяются R_{N-1}', P_{N-1}', Q_{N-1}', E_{N-1}', $S_{N-1}',..., R_0'$, P_0', Q_0', E_0', S_0' имеем ещё одно уравнение относительно первоначальных неизвестных

$$R_0' y_0 + P_0' v_0 + Q_0' u_0 + E_0' w_0 + S_0' = 0. \tag{7}$$

Наконец рассмотрим разложение

$$y_i = R_i'' v_i + P_i'' u_i + Q_i'' w_i + S_i''. \tag{8}$$

Отсюда имеем

$$R_i''v_i + P_i''u_i + Q_i''w_i + S_i'' + hv_i = R_{i+1}''v_i + hR_{i+1}''u_i + P_{i+1}''u_i + hP_{i+1}''w_i +$$
$$+ Q_{i+1}''(1+ha_i)w_i + hQ_{i+1}''b_iu_i + hQ_{i+1}''c_iv_i + hQ_{i+1}''d_i(R_i''v_i + P_i''u_i + Q_i''w_i + S'') +$$
$$+ hE_{i+1}''f_i + S_{i+1}'',$$
$$R_i'' = \xi_i^{-1}(R_{i+1}'' + hQ_{i+1}''c_i),$$
$$P_i'' = \xi_i^{-1}(hR_{i+1}'' + P_{i+1}'' + hQ_{i+1}''b_i),$$
$$Q_i'' = \xi_i^{-1}(hP_{i+1}'' + Q_{i+1}''(1+ha_i)),$$
$$S_i'' = \xi_i^{-1}(S_{i+1}'' + hE_{i+1}''f_i),$$
$$\xi_i = 1 - hQ_{i+1}''d_i.$$

Из граничных условий имеем

$$y_N = \beta_0^{-1}(\gamma_2 - \beta_1 v_N).$$

Поэтому получаем

$$R_N'' = -\beta_0^{-1}\beta_1,\ P_N'' = Q_N'' = 0,\ S_N'' = \beta_0^{-1}\gamma_2.$$

По этим значениям определяются коэффициенты разложения (8) и составляется ещё одно уравнение

$$-y_0 + R_0''v_0 + P_0''u_0 + Q_0''w_0 + S_0'' = 0.$$

Первоначальными неизвестными разностной схемы (2) y_0, v_0, u_0, w_0 определяются из системы уравнений

$$R_0y_0 + P_0v_0 + Q_0u_0 + E_0w_0 + S_0 = 0$$
$$R_0'y_0 + P_0'v_0 + Q_0'u_0 + E_0'w_0 + S_0' = 0$$
$$-y_0 + R_0''v_0 + P_0''u_0 + Q_0''w_0 + S_0'' = 0$$
$$\alpha_0y_0 + \alpha_1v_0 = \gamma_1.$$

Значения решения краевой задачи в узловых точках и значения производных решения определяются по разностной схеме (2).

Отметим, что если $y(x_i)$ -значение точного решения краевой задачи (1), а y_i- значение разностной схемы (2), то имеет место оценка $|y_i - y(x_i)| \le ch$. Здесь $c > 0$ не зависит от h.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989, 425 с.

2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974, 186 с.

IV TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İNTEQRAL ŞƏRTLƏRLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

Z.B.SEYİDOV

XÜLASƏ

Məqalədə IV tərtib diferensial tənliklər üçün inteqral şərtlərli sərhəd məsələsinin ədədi həlli öyrənilir. Baxılan məsələ üçün aşkar fərq sxemi qurulur və bu sxem ayırma üsulu ilə həll edilir.

Açar sözlər: yeganə həll, fərqlər sxemi, ayırma üsulu, köməkçi funksiyalar.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH THE INTEGRAL CONDITIONS FOR THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOUTH ORDER

Z.B.SEYIDOV

SUMMARY

In the paper the numerical solution of boundary-value problems for the differential equations of the fourth order is investigated. Explicit two-layered difference scheme is constructed for this boundary-value problem, and this scheme is solved by the method of decomposition.

Key words: uniqueness of the solution, difference scheme, decomposition method, auxiliary functions.

Принято в редакцию: 18.02.2013 г.
Подписано к печати: 08.03.2013 г.